O(2,m+2) 上の Eisenstein 級数について(保型形式とゼータ関数の研究)

平井, 剛和

数理解析研究所講究録
1002 巻 1997 年 180-191

$O(2, m+2)$ 上の Eisenstein 級数について

広島大学理学部　　平井剛和

0. 序文

半単純代数群上の Eisenstein 級数については Langrands により一般論が建設されているが，より深い数論に適用するためには具体的な考察が必要となる．n 次の斜交群上の Eisenstein 級数の Fourier 展開に関する研究は G.Shimura をはじめ多くの数学者によりなされてきた．[3] では，符号が $(1, m+1)$ 及び $(2, m+2)$ の直交群上の Eisenstein 級数の Fourier 展開の明示的な公式を求め，それらの性質について調べた．

S を rank m の負定値偶対称行列で maximal と仮定する．このとき S,

$$S_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

の $\mathbb{Q}$ 上の直交群をそれぞれ G, G_1, G_2 であらわす．G, G_1, G_2 のそれぞれの $\mathbb{Q}_v$-有理点を G_v, $G_{1,v}$, $G_{2,v}$ と書き，G_1, G_2 の $\mathbb{R}$-有理点の単位元を含む連結成分をそれぞれ $G_{1,\infty}^0$, $G_{2,\infty}^0$ であらわす．$K_{1,p} = G_{1,p} \cap GL_{m+2}(\mathbb{Z}_p)$, $K_{2,p} = G_{2,p} \cap GL_{m+4}(\mathbb{Z}_p)$ は $G_{1,p}$, $G_{2,p}$ の極大コンパクト部分群となる．$K_{1,\infty} \cong SO(m+1)$, $K_{2,\infty} \cong SO(2) \times SO(m+2)$ をそれぞれ $G_{1,\infty}^0$, $G_{2,\infty}^0$ の極大コンパクト部分群とする．$G_{1,\infty}^0$ [resp. $G_{2,\infty}^0$] は実領域 $\mathfrak{X} = G_{1,\infty}^0/K_{1,\infty}$ [resp. 複素領域 $\mathfrak{D} = G_{2,\infty}^0/K_{2,\infty}$] に推移的に作用する．$G_1$ [resp. G_2] の放物的部分群 P_1 [resp. P_2] として Levi 部分が $GL_1 \times G$ [resp. $GL_1 \times G_1$] となる上三角行列全体からなる群をとる．このとき，adele 群 $G_{1,A}$ 上の複素パラメータ s の付いた実解析的 Eisenstein 級数を

$$\mathcal{E}(g_1, s) := \sum_{\gamma_1 \in P_{1,\mathbb{Q}} \backslash G_{1,\mathbb{Q}}} |t_1(\gamma_1 g_1)|_A^{s+m/2} \tag{0.1}$$

と定義しよう．ここで，$g_1 \in G_{1,A}$ を岩澤分解したときの Levi 部分の $(1,1)$ 成分を $t_1(g_1)$ であらわした．この級数は $\mathrm{Re}\, s > m/2$ で広義一様絶対収束する．次に，$G_{2,\infty}^0$ の離散部分群

$$\Gamma := G_{2,\mathbb{Q}} \cap G_{2,\infty}^0 \prod_{p<\infty} K_{2,p}$$

に関する重さ l (l は正の偶数) の $\mathfrak{D}$ 上の複素パラメータ s の付いた実解析的 Eisenstein 級数を

$$E_l(Z, s) = \left(\frac{S_1[\mathrm{Im}\, Z]}{2}\right)^{(2s-2l+m+2)/4} \sum_{\gamma \in (P_2 \cap \Gamma) \backslash \Gamma} |J(\gamma, Z)|^{-s+l-m/2-1} J(\gamma, Z)^{-l} \tag{0.2}$$

と定義する．ここで，$J(g,Z)$ は $G^0_{2,\infty}\times\mathfrak{D}$ 上の標準的な正則保型因子をあらわした．この級数は $\mathrm{Re}\,s>(m+2)/2$ で広義一様絶対収束する．Eisenstein 級数 (0.1) 及び (0.2) を次のように正規化する．

$$\mathcal{E}^*(g_1,s):=\xi(S;s+1)\mathcal{E}(g_1,s)\begin{cases}1 & \text{if } m \text{ is even}\\ \xi(2s+1) & \text{if } m \text{ is odd}\end{cases},$$

$$E_l^*(Z,s):=P_l(s)\xi(S_1;s+1)E_l(Z,s)\begin{cases}1 & \text{if } m \text{ is even}\\ \xi(2s+1) & \text{if } m \text{ is odd}\end{cases},$$

ここで $P_l(s)$ は l, m にのみ依存する多項式をあらわし，$\xi(s)(=\xi(1-s))$ は正規化されたリーマン・ゼータ関数であり$\xi(S_1;s)$, $\xi(S;s)$ は定数関数に付随する標準的 L-関数で，Γ関数やゼータ関数などを使って容易にあらわされ $s\mapsto 1-s$ の下で不変である．

ここで得た最も重要な主結果は G.Shimura [9] の方法により，Eisenstein 級数 $\mathcal{E}(g_1,s)$, $E_l(Z,s)$ をそれぞれ adele 群 $G_{1,A}$, $G_{2,A}$ 上の関数とみなして Fourier 展開し局所的な計算に帰着して全ての Fourier 係数を明示的に求めたことである．これらの Fourier 係数の正則性と Fourier 級数の収束性を調べることにより Langlands [4] の一般論によらず直接次の主結果を導くことが出来る．

主結果． $\mathrm{Re}\,s>m/2$ [resp. $\mathrm{Re}\,s>m/2+1$] とする．正規化された Eisenstein 級数 $\mathcal{E}^*(g_1,s)$ [resp. $E_l^*(Z,s)$] は全 s-平面上の有理型関数に解析接続され $s\mapsto -s$ の下で不変である．

$E_l(Z,s)|_{s=l-m/2-1}$と特殊化すれば $l>m+2$ のとき (0.2) は絶対収束することから $E_l(Z,l-m/2-1)$ は Γ に関する重さ l の正則 Eisenstein 級数となる．$l\leq m+2$ のときは (0.2) の絶対収束性は保証されないが，Fourier 展開により解析接続された Eisenstein 級数で $E_l(Z,s)|_{s=l-m/2-1}$ を定義すれば，より小さい重さの正則 Eisenstein 級数が得られる．

主結果． 実解析的 Eisenstein 級数 $E_l(Z,s)$ は $s=l-m/2-1$ $(l>(m+4)/2)$ において正則である．すなわち $l>(m+4)/2$ に対して $E_l(Z,l-m/2-1)$ は重さ l の正則 Eisenstein 級数となる．

このようにして得られた正則 Eisenstein 級数の Fourier 係数について Bernoulli 数等を使ってあらわした明示的な公式を与えることにより，その Fourier 係数が分母の有界な有理数であることを証明した．

また，G_2 が符号 $(2,m+2)$ の直交群で $\mathbb{Q}$-rank が 1 の場合にも，以上に述べた内容と同様なことについて調べた．

[3] において特に重要な部分は，(2) のタイプの Eisenstein 級数の Fourier 展開

$$E_l(X+iY)=\sum_{\eta\in S_1^{-1}\mathbb{Z}^{m+2}}a_l(Y,\eta;s)e[S_1(\eta,X)]\quad(X+iY\in\mathfrak{D})$$

の Fourier 係数 $a_l(Y,\eta;s)$ の明示式を求めた点であるが，このことについて簡単に述べて

おく．(2) のタイプの Eisenstein 級数は $\mathbb{Q}$-rank 2 の代数群上の関数なので (1) のタイプの Eisenstein 級数より少し複雑になる．

G_2を Bruhat 分解したとき最も大きい直和成分からの寄与をまとめて adele の言葉であらわし，局所的な計算に帰着した（$\mathbb{Q}$-rank 1 の代数群上の Eisenstein 級数の場合はこの寄与しか出てこない）．この部分のアルキメデス的素点は G.Shimura [8] により解析接続や関数等式が調べられている合流型超幾何関数を使って容易に書くことが出来る．特に η が isotropic のとき，この合流型超幾何関数は古典的 Whittaker 関数になる．非アルキメデス的素点では，まず η が $S_1^{-1}\mathbb{Z}_p^{m+2}$ において primitive の場合について考察した．この場合の計算は S_1 の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index に関する帰納法を用いて Witt index が 1 の場合に帰着するという方法をとった．η が必ずしも primitive でない一般の場合は η が anisotropic, isotropic それぞれの場合を分けて考察した．η が anisotropic のときは T.Sugano [10] により調べられている Hecke 環の性質を使って Fourier 係数が η の primitivity と conductor の漸化式をもつことを導き，η が primitive の場合に帰着することが出来た．η が isotropic のときは直接計算することにより primitivity に関する漸化式を導いた．

G_2の Bruhat 分解の他の直和成分からの寄与も全てまとめて adele の言葉で書くことが出来る．この部分から寄与は，定数項に G_1 上の Eisenstein 級数 $\mathcal{E}(g_1, s)$ としてあらわれ，定数項以外の項では isotropic な η に関する Fourier 係数にのみあらわれる．非定数項における寄与のアルキメデス的素点は古典的 Whittaker 関数を使って書け，非アルキメデス的素点も容易に計算出来る．

[2] では，2 次の四元数ユニタリ群上の Eisenstein 級数について実解析的 Eisenstein 級数の明示的な Fourier 展開を求め解析接続や関数等式を導き，特殊化により得られる正則 Eisenstein 級数の性質について調べた．これは，$m = 1$ で G_2 の $\mathbb{Q}$-rank が 1 の場合に相当する．

この応用例として四元数環の判別式が 6 の場合に，重さ l の離散部分群 Γ に関する尖点形式からなる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $S_l(\Gamma)$ について調べた．この種の保型形式の空間は K.Hashimoto [1] により次元公式が与えられている．また，T.Oda の lifting により，重さが半整数の保型形式の空間から $S_l(\Gamma)$ に持ち上げられた尖点形式が得られる．特に，この場合次元公式から $\dim S_6(\Gamma) = 4$, $\dim S_8(\Gamma) = 6$ となることが分かる．解析接続により重さ 2 の正則 Eisenstein 級数が得られることと $S_6(\Gamma)$ が lifting による尖点形式で張られることを用いて，これらの Fourier 係数を調べ，具体的に基底を構成することで次の主結果を得た．

主結果.

$$\dim S_2(\Gamma) = 0, \quad \dim S_4(\Gamma) = 2.$$

また，$S_8(\Gamma)$ の元で lifting からは得られない尖点形式の例を具体的に構成した．

1. Eisenstein 級数の定義

$S \in M_m(\mathbb{Q})$ を偶整数不定値対称行列とし、S が maximal であるとする。すなわち、全ての $g \in GL_m(\mathbb{Q}) \cap M_m(\mathbb{Z})$, $\det g \neq \pm 1$ に対して $S[g^{-1}]$ は偶整数行列ではないと仮定する。G を S の直交群とし、G_1 [resp. G_2] を

$$S_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad [\text{resp. } S_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}].$$

の直交群とする。$L = \mathbb{Z}^m$, $L^* = S^{-1}L$, $L_1 = \mathbb{Z}^{m+2}$, $L_1^* = S_1^{-1}L_1$ とおく。G_p, $G_{i,p}$ $(i = 1, 2)$ の極大コンパクト部分群を

$$K_p := G_p \cap GL_m(\mathbb{Z}_p), \qquad K_{i,p} := G_{i,p} \cap GL_{m+2i}(\mathbb{Z}_p)$$

と定義する。∞ を $\mathbb{Q}$ の archimedean place とする。

$G_{1,\infty}^0$ の

$$\mathfrak{X} := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^\times \quad (\mathbb{R}_+^\times \text{ is the set of positive real numbers})$$

への作用及び、$G_{2,\infty}^0$ の

$$\mathfrak{D} := \left\{ Z \in \mathbb{C}^{m+2} \;\middle|\; S_1[\mathrm{Im}(Z)] > 0,\ S_1(Y_0, \mathrm{Im}(Z)) > 0,\ Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_m \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

への作用について復習しておく。$\mathbf{X} = (X, r) \in \mathfrak{X}$ に対して $\mathbf{X}^\sim := \begin{pmatrix} r - S[X]/2 \\ X \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+2}$ とおく。$g_1 \in G_{1,\infty}^0$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ に対して作用 $g_1 \langle \mathbf{X} \rangle \in \mathfrak{X}$ と正則保型因子 $j(g_1, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^\times$ を

$$g_1 \cdot \mathbf{X}^\sim = (g_1 \langle \mathbf{X} \rangle)^\sim \cdot j(g_1, \mathbf{X}).$$

によって定義する。1点 $\mathbf{X}_0 = (0_m, 1) \in \mathfrak{X}$ を固定し、$\mathbf{X}_0$の固定化部分群を $K_{1,\infty}$と定義する。明らかに、$K_{1,\infty}$は $G_{1,\infty}^0$ の極大コンパクト部分群 であり、$G_{1,\infty}^0 / K_{1,\infty} \cong \mathfrak{X}$ となる。

$Z \in \mathfrak{D}$ に対して、$Z^\sim := \begin{pmatrix} -S_1[Z]/2 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+4}$とおく。$g \in G_{2,\infty}^0$, $Z \in \mathfrak{D}$ に対して、作用 $g\langle Z \rangle \in \mathfrak{D}$ 及び、正則保型因子 $J(g, Z) \in \mathbb{C}^\times$ を

$$g \cdot Z^\sim = (g \langle Z \rangle)^\sim \cdot J(g, Z)$$

によって定義する。1点 $Z_0 = iY_0 \in \mathfrak{D}$ を固定するとき、Z_0の固定化部分群 $K_{2,\infty}$ は $G_{2,\infty}^0$の極大コンパクト部分群 であり $G_{2,\infty}^0 / K_{2,\infty} \cong \mathfrak{D}$ となる。以下では記号$\prod_{p<\infty} K_{i,p}$, $K_{i,\infty}K_{i,f}$ をそれぞれ $K_{i,f}$, $K_{i,A}$ $(i = 1,\ 2)$ と略記する。

G_1 の maximal parabolic subgroup P_1を

$$P_{1,\mathbb{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & * & * \\ & h_1 & * \\ & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \in G_{1,\mathbb{Q}} \middle| t_1 \in \mathbb{Q}^\times,\ h_1 \in G_\mathbb{Q} \right\} \tag{1.1}$$

によって定義し、G_2 の maximal parabolic subgroup P_2 を

$$P_{2,\mathbb{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} t & * & * \\ & h & * \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} \in G_{2,\mathbb{Q}} \middle| t \in \mathbb{Q}^\times,\ h \in G_{1,\mathbb{Q}} \right\}. \tag{1.2}$$

と定義する。Iwasawa 分解により, 各 $g_1 \in G_{1,A}$ は

$$g_1 = \begin{pmatrix} t_1(g_1) & * & * \\ & h_1(g_1) & * \\ & & t_1(g_1)^{-1} \end{pmatrix} k_1(g_1),\quad t_1(g_1) \in \mathbb{Q}_A^\times,\ h_1(g_1) \in G_A,\ k_1(g_1) \in K_{1,A}$$

の形に書くことができ、各 $g \in G_{2,A}$ は

$$g = \begin{pmatrix} t(g) & * & * \\ & h(g) & * \\ & & t(g)^{-1} \end{pmatrix} k(g),\quad t(g) \in \mathbb{Q}_A^\times,\ h(g) \in G_{1,A},\ k(g) \in K_{2,A}$$

の形に書ける。$s \in \mathbb{C}$ に対して、$G_{1,A}$上の Eisenstein 級数を

$$\mathcal{E}(g_1, s) := \sum_{\gamma_1 \in P_{1,\mathbb{Q}} \backslash G_{1,\mathbb{Q}}} \varphi\left(\gamma_1 g_1; s + \frac{m}{2}\right), \tag{1.3}$$

と定義すれば、この級数は $\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > m/2 \}$ で広義一様に絶対収束する。

$G_{2,\infty}^0$の離散部分群 Γ を

$$\Gamma := G_{2,\infty}^0 \cap M_{m+4}(\mathbb{Z})$$

と定義する。このとき、正の偶数 lに対して、複素パラメータ s の付いたΓに関する $\mathfrak{D}$ 上の重さ lの実解析的 Eisenstein 級数を

$$E_l(Z,s) = \left(\frac{S_1[\mathrm{Im}\, Z]}{2}\right)^{(2s-2l+m+2)/4} \sum_{\gamma \in (P_{2,\mathbb{Q}} \cap \Gamma) \backslash \Gamma} |J(\gamma, Z)|^{-s+l-m/2-1} J(\gamma, Z)^{-l}. \tag{1.4}$$

と定義すれば、この級数は $\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > m/2+1 \}$ で広義一様に絶対収束する。

この複素領域上の関数を次のようにして群 $G_{2,\infty}^0$上の関数とみる。$Z = g_\infty \langle Z_0 \rangle \in \mathfrak{D}$ $(g_\infty \in G_{2,\infty}^0)$ に対して、

$$E_l^{\mathrm{gr}}(g,s) := E_l(Z,s) J(g, Z_0)^{-l} \tag{1.5}$$

と定義する。$G_{1,A} = G_{1,\mathbb{Q}} G_{1,\infty}^0 K_{1,f}$ (cf. [10, p29]) より $E_l^{\mathrm{gr}}(g,s)$ は $G_{1,A}$上の関数として次のように書くことができる。

$$E_l^{\mathrm{gr}}(g,s) := \sum_{\gamma \in P_{2,\mathbb{Q}} \backslash G_{2,\mathbb{Q}}} f_l(\gamma g; s), \tag{1.6}$$

ここで、

$$f_l(g;s) = |t(g)|_A^{s+m/2+1} J(k(g)_\infty, Z_0)^{-l}$$

とする。

[3] では G.Shimura [9] の方法を使って Eisenstein 級数 (1.3) (1.4) を adele 群上の関数とみて Fourier 展開し、局所的な計算に帰着することにより全ての Fourier 係数について明示的な公式を得た。以下ではいくつかの記号を準備し、 $E_l(Z,s)$ の Fourier 展開について得られた主結果について述べることにする。

2. 準備

1. k を $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{o}$ を $\mathbb{Z}_p$, とし、$\mathfrak{o}$ の 極大 ideal を $\mathfrak{p} = (p)$ であらわす。S を rank m の非退化偶整数対称行列とする。$L = \mathfrak{o}^m$, $V = k^m$ とおく。この section では S は maximal で isotropic あると仮定する。L の dual lattice を $L^* = S^{-1}L$ と定義し

$$L' = \left\{ x \in L^* \mid \tfrac{1}{2}S[x] \in \mathfrak{p}^{-1} \right\}$$

とおく。このとき、 L' は Lp^{-1} に含まれる lattice であり L'/L は $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 上の vector space となる。その次元を$\partial = \partial(S)$ で表す。L' の dual lattice を次のように定義する。

$$L'^* := \{\eta \in V \mid S(\eta, X) \in \mathfrak{o} \quad \text{for all } X \in L'\}.$$

$\eta \in L^*$ で $p^{-1}\eta$ が L^* に属さないとき primitive であるという。 primitive な元からなる集合を L^*_{prim} であらわす。よく知られているように、適当に L の $\mathfrak{o}$-basis をとりかえて次のように仮定してよい。

$$S = S_\nu = \begin{pmatrix} & & J_\nu \\ & S_0 & \\ J_\nu & & \end{pmatrix}, \quad J_\nu = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \text{ (1 appears } \nu \text{ times)},$$

ここで、 S_0 は anisotropic であり、$\nu = \nu(S)$ は S の Witt index とする。S_0 の rank を $n_0 = n_0(S)$ であらわす。したがって $m = 2\nu + n_0$ となる。Witt index ν を強調する必要があるときは V_ν, L_ν などと書くことにする。

$\eta = p^a\eta_0$, $\eta_0 \in L^*_{\text{prim}}$ とおく。このとき次のように仮定してよい。

$$(2.1)\quad \eta_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} p^{2f}\alpha_0 \\ p^f\beta_{\nu-1} \\ 1 \end{pmatrix} \in L^*_{\nu,\text{prim}}, \quad \beta_{\nu-1} = \begin{pmatrix} 0_{\nu-1} \\ \beta_0 \\ 0_{\nu-1} \end{pmatrix}, \quad S^{\sim} \text{ is maximal} \quad \text{if } S[\eta] \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{n_0+2\nu-2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{if } S[\eta] = 0, \end{cases}$$

ここで、$S^{\sim} = \begin{pmatrix} S_{\nu-1} & -S_{\nu-1}\beta_{\nu-1} \\ -{}^t\beta_{\nu-1}S_{\nu-1} & -2\alpha_0 \end{pmatrix}$ とする。

$\eta \in L^*$ が anisotropic のとき, η の V における 直交補空間 を $\eta^\perp$ で表す。$S|_{(\eta^\perp \cap L)}$ の表現行列が適当な $g \in M_{m-1}(\mathfrak{o})$ に対して $S_\eta[g]$ となるような rank $m-1$ の maximal な偶整数対称行列 S_η が存在する。このとき、次のようにおく。

$$(2.2)\quad g_{S,p}(\eta;s) := \left\{\left(p^s - p^{-n_0/2}\beta_{S,\eta} - p^{-s+\partial-1}\delta(\beta_0 \notin L_0'^*)\right) p^{(f+a)s} \sum_{k=0}^{a} p^{(-s+m/2-1)k} - \left(p^{-s} - p^{-n_0/2}\beta_{S,\eta} - p^{s+\partial-1}\delta(\beta_0 \notin L_0'^*)\right) p^{(-f-a)s} \sum_{k=0}^{a} p^{(s+m/2-1)k}\right\} \times \frac{1}{p^s - p^{-s}}$$

ここで、

$$(2.3)\qquad \beta_{S,\eta} := \left\{p^{n_0} - p^{\partial+1} + p^{\partial'+(n_0-n_0'+1)/2} - p^{(n_0+n_0'-1)/2}\right\}/(p-1)$$

$n_0' = n_0(S_\eta)$, $\partial' = \partial(S_\eta)$ とする。

次に [6] にしたがって S に関する local な定数関数に付随する標準的 L-関数 を定義しておく。

$$(2.4)\qquad L_p(S;s) := \prod_{j=1}^{m-1} \zeta_p(s+j-m/2) B_{S,p}(s) \begin{cases} L_p(\chi_S, s) & \text{if } \ m : \text{even} \\ 1 & \text{if } \ m : \text{odd}, \end{cases}$$

ここで、

$$(2.5)\qquad B_{S,p}(s) := \begin{cases} 1 & \text{if } \ \partial = 0 \text{ or } (n_0,\partial) = (2,1) \\ 1 + p^{-s+1/2} & \text{if } \ (n_0,\partial) = (1,1) \\ (1+p^{-s+1})(1+p^{-s}) & \text{if } \ (n_0,\partial) = (2,2) \\ 1 - p^{-s+1/2} & \text{if } \ (n_0,\partial) = (3,1) \\ (1+p^{-s+1/2})(1-p^{-s+1/2}) & \text{if } \ (n_0,\partial) = (3,2) \\ (1-p^{-s+1})(1-p^{-s}) & \text{if } \ (n_0,\partial) = (4,2) \end{cases}$$

であり $\chi_S(p)$ は $k(\sqrt{(-1)^{m(m-1)/2}\det S})/k$ に対応する Legendre symbol を表す。

2. Q を maximal な rank m の偶整数対称行列で、$Q<0$ または Q の符号が $(1, m-1)$ $(m \geq 2)$ と仮定する。このとき、定数関数に付随する global な標準的 L-関数を

$$L(Q;s) := \prod_{p<\infty} L_p(Q;s) \quad (\, s \in \mathbb{C}\,)$$

と定義する。ここで、$L_p(Q;s)$ は (2.4) で定義された local な標準的 L-関数とする。gamma factor として

$$(2.6)\qquad L_\infty(Q;s) := \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{if } Q<0 \\ 2^{-m/2+2}\pi^{1/2}\dfrac{\Gamma((2s-m+2)/4)}{\Gamma((2s+m)/4)} & \text{if } \operatorname{sgn}(Q) = (1, m-1) \end{matrix} \right\} (2\pi)^{-[m/2]s} \prod_{j=1}^{[m/2]} \Gamma(s-j+m/2) \begin{cases} |\det Q|^{s/2} & \text{if } m \text{ is even} \\ |2^{-1}\det Q|^{s/2} & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases}$$

をとり、

(2.7) $$\xi(Q;s) := L_\infty(Q;s)L(Q;s) \quad (\text{cf. [6]})$$

とおく。関数 $\xi(Q;s)$ は s の有理型関数として全複素平面に解析接続され $s \mapsto 1-s$ の下で不変である。

関数$\omega(g,h;\alpha,\beta)$ を G.Shimura [8] により調べられており

$$(g,h,\alpha,\beta) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{m+2} \times \mathbb{C}^2$$

で定義される合流型超幾何関数とする。ここで、

$$\mathcal{P} := \left\{ X \in \mathbb{R}^{m+2} \mid S_1[X] > 0,\ S_1(X, Y_0) > 0 \right\}.$$

とおいた。このとき、$\omega(g,h;\alpha,\beta)$ は $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}$ の正則関数であり関数等式

(2.8) $$\omega(g,h;\alpha,\beta) = \begin{cases} \omega(g,h;m/2+1-\beta, m/2+1-\alpha) & \text{if } h=0 \text{ or } S_1[h] \neq 0, \\ \omega(g,h;m+1-\beta, m+1-\alpha) & \text{if } S_1[h] = 0. \end{cases}$$

を満たす。

関数

(2.9) $$W_{\kappa,\mu}(z) := \frac{z^\kappa e^{-z/2}}{\Gamma(\mu+1/2-\kappa)} \int_0^\infty t^{\mu-\kappa-1/2} e^{-t} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{\mu+\kappa-1/2} dt$$
$$(\,\mathrm{Re}(\mu+1/2-\kappa) > 0,\ |\arg z| < \pi\,),$$

は古典的 Whittaker 関数とよばれ、(κ,μ) の正則関数として全複素平面 $\mathbb{C}^2$ 上に解析接続され関数等式 $W_{\kappa,\mu} = W_{\kappa,-\mu}$ を満たす。

3. 主結果

Eisenstein 級数 $E_l(Z,s)$ を

$$E_l^*(Z,s) := P_l(s)\xi(S_1;s+1)E_l(Z,s) \begin{cases} 1 & \text{if } m \text{ is even} \\ \xi(2s+1) & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases}$$

と正規化しておく。ここで、

$$P_l(s) := P_l^{(+)}(s)P_l^{(-)}(s),$$
$$P_l^{(+)}(s) := \prod_{j=0}^{l/2-1} ((2s+m+2)/4+j),$$
$$P_l^{(-)}(s) := \prod_{j=0}^{l/2-1} ((2s-m+2)/4+j)$$

$E_l^*(Z,s)$ の explicit な Fourier 展開は次の定理で与えられる。

Theorem 3.1. l を非負の偶数とし、$\mathrm{Re}\, s > m/2+1$ とする。$X+iY \in \mathfrak{D}$, $g\langle Z_0\rangle = X+iY$ $(g \in G^0_{2,\infty})$ に対して正規化された Eisenstein 級数 $E^*_l(X+iY,s)$ は次の Fourier 展開を持つ。

$$E^*_l(X+iY,s) = \sum_{\eta\in L^*_1} a^*_l(Y,\eta;s)e[S_1(\eta,X)],$$

ここで Fourier 係数 $a^*_l(Y,\eta;s)$ は次のようになる。

(i) $\eta = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} a^*_l(Y,0;s) &= \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{(2s+m-2l+2)/4} P_l(s)\xi(S_1;s+1)\begin{Bmatrix} 1 & \text{if } m \text{ is even} \\ \xi(2s+1) & \text{if } m \text{ is odd}\end{Bmatrix} \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{(-2s+m-2l+2)/4} P_l(-s)\xi(S_1;s)\begin{Bmatrix} 1 & \text{if } m \text{ is even} \\ \xi(2s) & \text{if } m \text{ is odd}\end{Bmatrix} \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{(-2l+2)/4} P^{(-)}_l(s)P^{(-)}_l(-s)\xi(s-m/2+1)\xi(s+m/2) \\ &\qquad \times\mathcal{E}^*(h(g),s). \end{aligned}$$

(ii) $S_1[\eta]=0$, $S_1(\eta,Y_0) \gtrless 0$ かつ $A^{-1}\eta$ (A は正の整数) が L^*_1 において primitive なとき、

$$\begin{aligned} a^*_l(Y,\eta;s) &= \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{(-2s+m-2l+2)/4} |S_1(\eta,Y)|^{(2s-m-2)/4} Q^*_{l,\eta}(s)\frac{\xi(S_1;s)}{\xi(s-m/2)} \\ &\quad \begin{Bmatrix} 1 & \text{if } m \text{ is even} \\ \xi(2s) & \text{if } m \text{ is odd}\end{Bmatrix} W_{\pm l/2,(2s-m)/4}(4\pi|S_1(\eta,Y)|)\sigma_{-s+m/2}(A) \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{(2s+m-2l+2)/4} |S_1(\eta,Y)|^{(-2s-m-2)/4} Q^*_{l,\eta}(-s)\frac{\xi(S_1;s+1)}{\xi(s+m/2+1)} \\ &\quad \begin{Bmatrix} 1 & \text{if } m \text{ is even} \\ \xi(2s+1) & \text{if } m \text{ is odd}\end{Bmatrix} W_{\pm l/2,(2s+m)/4}(4\pi|S_1(\eta,Y)|)\sigma_{s+m/2}(A). \end{aligned}$$

(iii) $S_1[\eta] > 0$ かつ $S_1(\eta,Y_0) \gtrless 0$ のとき、

$$\begin{aligned} a^*_l(Y,\eta;s) &= \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{-l/2} 2^{(2m\pm 4l+11)/4}\pi^{(-[m/2]\pm 2l)/2} S_1[Y]^{\pm l/2} S_1[\eta]^{(-m\pm 2l-2)/4}|S_{1,\eta}|^{-1/4} \\ &\quad Q^*_{l,\eta}(s)\xi(S_{1,\eta};s+1/2)g_{S_1}(\eta;s) \\ &\quad \omega(2\pi Y,2\eta;(2s+m+2l+2)/4,(2s+m-2l+2)/4). \end{aligned}$$

(iv) $S_1[\eta] < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} a^*_l(Y,\eta;s) &= \left(\tfrac{1}{2}S_1[Y]\right)^{-l/2} 2^{(6m+9)/4}\pi^{(-[m/2]-1)/2} S_1[Y]^{m/4} S_1[\eta]^{-1/2}|S_{1,\eta}|^{-1/4} \\ &\quad \delta_+(\eta,Y)^{l/2}\delta_-(\eta,Y)^{-l/2}Q^*_{l,\eta}(s)\xi(S_{1,\eta};s+1/2)g_{S_1}(\eta;s) \\ &\quad \omega(2\pi Y,2\eta;(2s+m+2l+2)/4,(2s+m-2l+2)/4). \end{aligned}$$

ここで、$g_{S_1}(\eta;s) := \prod_p g_{S_1,p}(\eta;s)$ は (2.2) で定義される多項式の実質有限積であり、

$$(3.1)\qquad Q^*_{l,\eta}(s) := \begin{cases} P_l(-s) & \text{if } \eta = 0 \\ (-1)^{l/2} P_l^{(-)}(-s) & \text{if } S_1[\eta] = 0,\ S_1(\eta, Y_0) > 0 \\ P_l^{(-)}(-s) \cdot P_l^{(-)}(s) & \text{if } S_1[\eta] = 0,\ S_1(\eta, Y_0) < 0 \\ 1 & \text{if } S_1[\eta] > 0,\ S_1(\eta, Y_0) > 0 \\ P_l(s) P_l(-s) & \text{if } S_1[\eta] > 0,\ S_1(\eta, Y_0) < 0 \\ (-1)^{l/2} P_l^{(-)}(-s) \cdot P_l^{(-)}(s) & \text{if } S_1[\eta] < 0, \end{cases}$$

とする。また、$\eta \in L_1^*$ が anisotropic のとき, η の V における 直交補空間 を $\eta^\perp$ で表す。$S_1|_{(\eta^\perp \cap L)}$ の表現行列が適当な $g \in M_{m-1}(\mathbb{Z})$ に対して $S_{1,\eta}[g]$ となるような rank m の maximal な偶整数対称行列を $S_{1,\eta}$ であらわす。$\delta_+(\eta, Y)$, $\delta_-(\eta, Y)$ はそれぞれ 2 次方程式

$$t^2 - S_1(\eta, Y)t + S_1[\eta]S_1[Y]/4 = 0$$

の正の解の積、負の解の積をあらわすものとする (cf. [8, (4.1)])。

Fourier 係数の解析接続性や関数等式を調べ、Fourier 級数の収束性を証明することにより Langlands [4] の一般論によらず直接次の結果を得ることができる。

Theorem 3.2. Eisenstein 級数 $E_l^*(Z,s)$ は全 s-平面上の有理型関数に解析接続され $s \mapsto -s$ の下で不変である。

$l > m+2$ に対して

$$E_l(Z) := E_l(Z, l - m/2 - 1) = \sum_{\gamma \in (P_{2,\mathbb{Q}} \cap \Gamma) \backslash \Gamma} J(\gamma, Z)^{-l}$$

とおけば、この級数は $\mathfrak{D}$ 上広義一様に絶対収束することから $E_l(Z)$ は $\mathfrak{D}$ 上の重さ l の正則 Eisenstein 級数となる。$l \le m+2$ のとき $s = l - m/2 - 1$ での (1.4) の収束性は保証されていないが、Shimura [9] のように、解析接続された Eisenstein 級数で定義してやることにより、より重さの小さい正則 Eisenstein 級数を構成することができる。

Theorem 3.3.

$$E_l(Z) := E_l(Z, l - m/2 - 1) \quad \text{for } l > (m+4)/2$$

とおけば $E_l(Z)$ は $\mathfrak{D}$ 上 Z の正則関数となる。さらに、m が偶数で χ_{S_1} non-trivial のとき、$l = (m+4)/2$ に対しても $E_l(Z) := E_l(Z, 1)$ は正則である。

Theorem 3.1および Theorem 3.3 によって、正則 Eisenstein 級数の Fourier 展開の明示的な公式が得られる。

Theorem 3.4. l を偶数とする。m が偶数で χ_{S_1} が non-trivial のとき $l \geq m/2+2$ とし、それ以外のとき $l > m/2+2$ と仮定する。正則 Eisenstein 級数

$$E_l(Z) = 1 + \sum_{\substack{\eta \in L_1^* \\ S_1[\eta]\geq 0, S_1(\eta, Y_0)>0}} a_l(\eta) e[S_1(\eta, Z)]$$

の Fourier 係数は次で与えられる。

(i) $S_1[\eta] = 0$ でかつ $A^{-1}\eta$ (A は正の整数) が L_1 において primitive なとき

$$a_l(\eta) = -\frac{2l}{B_l}\sigma_{l-1}(A).$$

(ii) $S_1[\eta] > 0$ のとき,

$$a_l(\eta) = \frac{B_{S_{1,\eta}}(-l+(m+1)/2)}{B_{S_1}(-l+m/2)}\hat{g}_l(\eta)$$
$$\left\{\begin{array}{ll} (-1)^{[(m+2)/4]}2^{-l+m/2+3}l\left(l-\frac{m}{2}\right)\frac{1}{B_l B_{l-m/2,\chi_{S_1}}}|\det S_{1,\eta}|^{l-m/2-1}\left|\frac{d(S_1)}{\det S_1}\right|^{l-(m+1)/2} & \\ \hfill \text{if } m \text{ is even} & \\ -(-1)^{[(m+2)/4]}2^{l-(m-3)/2}l\frac{B_{l-(m+1)/2,\chi_{S_{1,\eta}}}}{B_l B_{2l-m-1}}\left|\frac{\det S_{1,\eta}}{d(S_{1,\eta})}\right|^{l-m/2-1}|\det S_1|^{-l+(m+1)/2} & \\ \hfill \text{if } m \text{ is odd} & \end{array}\right\},$$

ここで、$d(S)$, χ_S はそれぞれ二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m(m-1)/2}\det S})/\mathbb{Q}$ に対応する判別式、Dirichlet 指標をあらわす。B_n [resp. $B_{n,\chi}$] は 第 n 番目の Bernoulli 数 [resp. χに関する一般化された Bernoulli 数] (定義は [5, p.89, 94] と同様) とする。また、

$$B_{S_1}(s) = \prod_{p<\infty} B_{S_1,p}(s) \quad (\text{cf. } (2.5))$$

と定義し、

$$\begin{aligned} \hat{g}_l(\eta) &:= \left|\frac{\det S_1}{\det S_{1,\eta}}S_1[\eta]\right|^{(2l-m-2)/4} g_{S_1}(\eta; l-m/2-1) \\ &= \prod_p \hat{g}_{l,p}(\eta) \end{aligned}$$

は p の多項式の実質有限積である。

Theorem 3.4 $E_l(Z)$ の Fourier 係数について次が成り立つ。

Corollary 3.5 Fourier 係数 $a_l(\eta)$ は有理数である。さらに、S_1 と l にのみ依存する定数 $C \in \mathbb{Z}-\{0\}$ があり、全ての $\eta \in L_1^*$ に対して $Ca_l(\eta) \in \mathbb{Z}$ が成り立つ。

Remark 1. $l > m+2$ のときは正則 Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示的な公式は Jacobi form の theta lifting によっても求められる。(cf. [7]).

Remark 2. [3] では、$\mathbb{Q}$-rank が 1 の場合にも $O(2, m+2)$ 上の Eisenstein 級数の明示的な Fourier 展開の公式を求めている。特に、$\mathbb{Q}$-rank が 1 でかつ $m=1$ のとき代数群 G_2は 2 次の四元数ユニタリ群と isogenous であり、序文で述べたようにこの Eisenstein 級数は [2] において重さが小さい保型形式の空間の構造決定に重要な役割を果たしている。

References

[1] K. Hashimoto, The dimension of the space of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two, Math. Ann. **266** (1984), 539-599.

[2] Y. Hirai, On Eisenstein series on quaternion unitary groups of degree 2, preprint, 1996.

[3] Y. Hirai,Eisenstein series on orthogonal groups $O(1, m+1)$ and $O(2, m+2)$, Hiroshima Math. J. **27** (1997).

[4] R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lect. Notes Math. **544**, Springer, 1976.

[5] T. Miyake, Modular forms, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1989.

[6] A. Murase and T. Sugano, Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups, I. The case of orthogonal groups, Math. Ann. **299** (1994), 17-56.

[7] A. Murase and T. Sugano, Poincaré series and theta lifting, preprint.

[8] G. Shimura, Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. **260** (1982), 269-302.

[9] G. Shimura, On Eisenstein series, Duke Math. J. **50** (1983), 417-476.

[10] T. Sugano, Jacobi forms and the theta lifting, Comment. Math. Univ. St. Pauli. **44** (1995), No.1, 1-57.